ENSA d'Al-Hoceima
AP-I, Première Année,
Algèbre Linéaire,

Année 2019/2020
Semestre 2
TD3

Série N^{o}3 : Endomorphismes, matrices et inverse d'une matrice

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ défini par

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f(\mathrm{i}) = \mathrm{j},$$

où $\mathrm{j} = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

1. Démontrer que f est un automorphisme de $\mathbb{C}$.
2. Déterminer le complexe z tel que $f(z) = \mathrm{i}$.
3. Soit f^{-1} l'application réciproque de f. Ecrire la matrice de f^{-1} relativement à la base $\{1, \mathrm{i}\}$.

Exercice 2

Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$F = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + 2z = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de F.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ où G est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $u = (2, 1, 1)$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et (i, j) une base de E. Soit f et g deux endomorphismes de E dont les matrices dans la base (i, j) sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f et g sont inversibles,puis trouver les matrices de f^{-1} et g^{-1} dans la base (i, j).
2. Déterminer dans la base (i, j) les matrices des endomorphismes suivants :

$$(x.f - y.g); \quad (2.f - x.id_E); \quad (-f + \pi.g); \quad (x.f + \pi y.g).$$

3. Trouver des relations entre x et y pour que les endomorphismes

$$(x.f - y.g); \quad (2.f - x.id_E); \quad (-f + \pi.g); \quad (x.f + \pi y.g)$$

soient inversibles.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que f^2 soit l'endomorphisme nul.

1. Calculer $(id_E - f) \circ (id_E + f)$.
2. En déduire que $(id_E - f)$ et $(id_E + f)$ sont bijectifs. Quels sont les endomorphismes $(id_E - f)^{-1}$ et $(id_E + f)^{-1}$.

3. Vérifier les résultats précédents lorsque l'espace vectoriel E est de dimension 2 et lorsque f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans une base (i, j) fixée de E est :
   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

On note par O la matrice nulle et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordres 2. Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} \alpha + \delta & = -1 \\ \alpha\delta - \beta\gamma & = -2, \end{cases}$$

On désigne $E = \overline{< I, A >}$ l'espace engendré par les matrices I et A.

1. Quelle est la dimension de E ?.
2. Vérifier que :
$$A^2 = -A + 2.I.$$
   En déduire que A est inversible et que $A^{-1} \in E$.
3. Montrer que E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. On prend $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ et $\delta = 0$.
   (a) Vérifier que la relation : $A^2 = -A + 2.I$, est satisfaite.
   (b) Préciser le noyau et l'image des endomorphismes φ et ψ de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base naturelle sont respectivement :
$$A \quad \text{et} \quad A + 2.I.$$

Exercice 6

On considère dans $\mathbb{C}$ le système suivant :

$$\begin{cases} (1+\mathrm{i})x + (1+2.\mathrm{i})y & = 1+5.\mathrm{i} \\ (3-\mathrm{i})x + (4-2.\mathrm{i})y & = 2-\mathrm{i}. \end{cases} \tag{6.1}$$

d'inconnus complexes x et y. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'on peut écrire le système (6.1) sous la forme suivante :
$$A.X = b$$
   où A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à déterminer et $b = \begin{pmatrix} 1+5.\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}$
2. Montrer que la matrice A est inversible, puis trouver son inverse A^{-1}.
3. Ecrire $X = A^{-1}b$ et calculer x et y.